

Title	Randomizationによる波形変化の数値実験 (層流の安定性に関する非線型問題)
Author(s)	田中, 航二; 佐藤, 浩; 本橋, 龍郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1971), 120: 48-65
Issue Date	1971-08
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/106475">http://hdl.handle.net/2433/106475</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## Randomization による波形変化の 数値実験

東大 宇宙航空研

田 中 航 二  
佐 藤 浩  
本 橋 龍 郎

### § 1. 序

層流、乱流の遷移現象で観測される速度変動の波形変化を解析する事は遷移機構の解明に有力な手段たりうる。速度変動の波形変化の過程は規則的な波形が崩れてランダムな部分が増大していく偶然化(randomization)現象としてとらえる事が出来る。従って偶然化現象としての遷移過程を定量的に記述する事が要求されるが、その試みの一つとして偶然度(randomness factor)という言葉を用いる。これは周波数、時間、空間の各点によってことなる量と考えられ、明確な形での定義はまだできないが、その一例として何も変動を含まない、完全に必然的である流れの偶然度を零とし、完全に発達した乱流\*は適当な値を持つとして遷移過程での各域の値を決定

---

\* 完全に発達した乱流とは“特徴的な周波数成分が存在しない”ものを意味する。

する。そして偶然度の増大に伴い偶然化の過程が進行すると考える。

本稿の目的は偶然化の過程を数値実験で実現する事にある。そのために偶然度を適当に定めその増大に伴って偶然化の進展に対応させ波形が如何なる変化を行うかをしらべた。その際に振幅および位相がランダムに変調したランダム基本波を用いてランダム波形の合成を行い、偶然度のちがいにより生じる波形の差異を調べた。

## §2. ランダム波形の一般的表示

調和正弦波の代りに振幅および位相の変動部分がゆるやかに、しかしランダムな変動をするランダム基本波の集合でランダム波を記述しよう。速度の変動分を $u$ として、

$$u = \sum_{k=1}^N (A_k + a_k(t)) \sin(\omega_k t + \Phi_k + \varphi_k(t)) \quad (2.1)$$

で波形を表現する。ここで $k$ は波数であり、 $k=1, 2, 3, \dots, N$ なる整数である。

(2.1) 式の右辺の振幅部分を、

$$A_k = f_k (A_{k1} + B_k) \quad (2.2)$$

$$a_k(t) = \epsilon_k m_k P_k(t) \quad (2.3)$$

とし、位相部分を、

$$\Phi_k = g_k (\Phi_{k1} + F_k) \quad (2.4)$$

$$\varphi_k(t) = \delta_k \pi_k g_k(t) \quad (2.5)$$

とする。ここで  $A_k$ ,  $\Phi_k$  は時間に無関係な確定した大きさと持ち、 $a_k$ ,  $\varphi_k$  は時間的に変化するランダム量である。添字が付随している  $A_{kl}$ ,  $\Phi_{kl}$  は層流状態での成分を示す。(2.2) ~ (2.5) 式の各量は偶然化の過程に対応して変動する量(偶然度等)とスペクトルを構成する部分とから成っている。そして上述の表記は振幅部分と位相部分の対応が明確であり、両者を並行して論ずる事が出来るから物理的意味の把握も容易である。まず偶然化の過程に対応して変動する量としては、規則性の度合を示す量  $f_k$  および  $g_k$ , 非線形性を示す量  $B_k$  および  $F_k$ , 偶然度を示す量  $\epsilon_k$ ,  $\delta_k$  でここにおいて  $\epsilon_k$  を振幅偶然度,  $\delta_k$  を位相偶然度と呼ぶ。これらの量の変化を表 1.1 に示す。

表 1.1 Randomization に伴う諸量の変化\*

		完全に規則的 (層流状態)	規則性+不規則性 (遷移領域)	完全に不規則 (乱流)
振 幅 部 分	$f_k$	1		0
	$B_k$	0	$\longleftrightarrow$	const
	$\epsilon_k$	0		1
位 相 部 分	$g_k$	1		0
	$F_k$	0	$\longleftrightarrow$	const
	$\delta_k$	0		1

\* 表中の 1 は規格化されを意味で 1 である。

つぎにスペクトルを構成する部分について考える。スペクトルは一般的に、

$$A_k^2 + \overline{a_k^2} \quad (2.6)$$

で示される。バーはアンサンブル平均を示す。いま  $p_k(t)$  なる量の平均値および二乗平均値を、

$$\overline{p_k} = 0, \quad \overline{p_k^2} = 1 \quad (2.7)$$

とおくと、

$$\overline{a_k^2} = \epsilon_k^2 m_k^2 \quad (2.8)$$

となる。すなわち  $m_k$  は変動分のスペクトルを構成する要素であり、以後スペクトル構成関数と呼ぶ。 $p_k(t)$  は変動の緩急を示す変化周期と変数にまち、その変化周期の大小に対応してスペクトルの広がりを変化する。位相の変動に関して  $(2.7)$  式の様に平均値および二乗平均値が定義できる。すなわち、

$$\overline{\phi_k} = 0, \quad \overline{\phi_k^2} = 1 \quad (2.9)$$

となり、更に位相スペクトルとでも呼ぶべき量が定義出来る。

一般的には位相スペクトルは、

$$\overline{\phi_k^2} + \overline{\phi_k(t)^2} \quad (2.10)$$

$$\overline{\phi_k^2} = \delta_k^2 n_k^2 \quad (2.11)$$

となる。

遷移過程で代表的な場合のスペクトルの変化をみると、平衡状態では  $A_k$  のみが存在し線スペクトルとなる。これは物理

的には人工攪乱を加えたときの，その周波数成分に対応するスペクトル成分である。そして次第に非線形の影響を受け  $B_k$  成分の寄与により線スペクトルが拡がりを持っていく。そして最終的に乱流状態に近づくにつれ連続スペクトルとなり完全に乱流状態になると  $\overline{u_k}$  のみが残る。

### § 3. 数値実験の方法

#### 3.1 層流部分の偶然化過程

層流状態からのずれが小さい初期遷移状態は，正弦波が次第に崩れてゆく過程としてとらえる事が出来る。したがって，その遷移過程に対応する波形は正弦波と偶然度の低い成分波を重ねる事により得られる。波形の一般表記 (2.1) 式との対応を考えると， $N=2$  の場合となり振幅部分および位相部分の対応は以下の様になる。すなわち正弦波成分の振幅部分は， $A_1=1$ ，変動分がないから  $a_1(t)=0$  となり，位相部分は，初期位相を便宜上  $\Phi_1=0$  ととり，位相変動はないから  $\phi_1(t)=0$  となる。重ねる成分は， $A_2=\Phi_2=0$ ，変動分は，

$$a_2(t) = \epsilon_2 m_2 p_2(t) \quad (3.1)$$

$$\phi_2(t) = \delta_2 n_2 q_2(t) \quad (3.2)$$

であり，スペクトルは離散的であるし，波数に依存しないから  $m_2=n_2=1$  とおく。偶然度  $\epsilon_2$ ， $\delta_2$  はランダム成分が正弦波

成分に対してどの程度の比率をしめるかを示す量と考えてよい。これより速度変動の基本式は、

$$u = \sin \omega_1 t + \epsilon_2 p_2(t) \sin(\omega_2 t + \delta_2 q_2(t)) \quad (3.3)$$

で表記される。

### 3.2 振幅および位相の変動の $t$ -変化\*

振幅および位相の変動を構成する  $p_2(t)$  および  $q_2(t)$  は偶然度  $\epsilon_2$ ,  $\delta_2$  と共に波形変化に与える影響は大きい。したがって、 $p_2(t)$  および  $q_2(t)$  の  $t$ -変化の種々の場合を考えそれより波形がどのように変化するかとみる。振幅および位相の  $t$ -変化を以下の二つに分けて考える。

(i) 振幅の  $t$ -変化がランダム、位相の  $t$ -変化が規則的な場合（振幅の変化については図 3.1，位相の変化については図 3.2 参照）

(ii) 振幅および位相の  $t$ -変化が共にランダムな場合。

（振幅変化は図 3.3，位相変化は図 3.4 参照）

ここで変化の緩急を示す量として変化周期  $\tau_r$  を用いる。上記の例の  $t$ -変化を図示する。(ii) の場合その振幅変化は図 3.1 のように変化周期  $\tau_r$  と  $t$  とをれば、区間  $m\tau_r < t < (m+1)\tau_r$  ( $m=0, 1, 2, \dots$  整数) の間を一定値とし、端点  $m\tau_r, (m+1)\tau_r$  の値はランダムであって、その値は閉区間  $[0, 1]$  の間の

---

\*  $t$  は時変数とは限らず、空間変数であっても良い。

一様乱数を用いて与える。尚乱数は混合型合同法を用いて発生させ、 $\chi^2$ -検定法を用いて十分不規則と認められる閉区間  $[0, 1]$  の内の一様乱数列を用いた。以下の計算に用いる基本の乱数も同様のものを用いた。

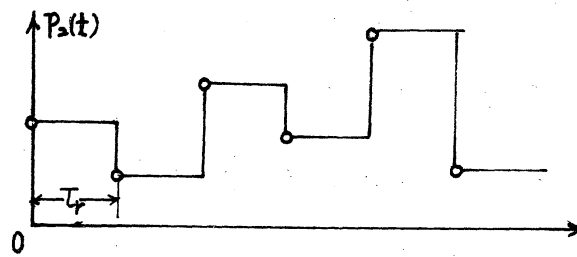
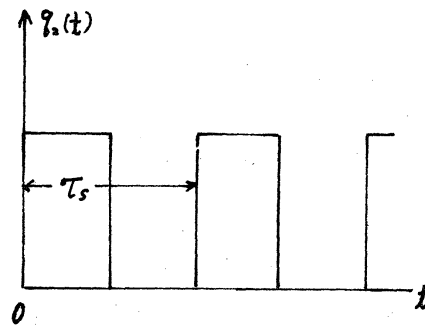
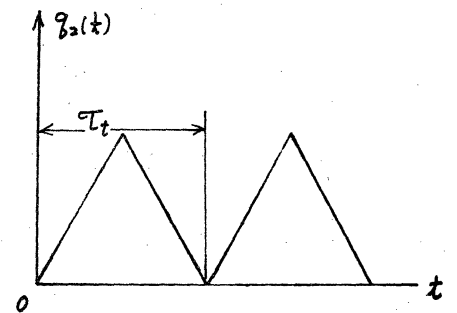


図3.1 振幅の  $t$ -変化 (i) の場合) ○印の点は乱数

つぎに位相の  $t$ -変化を2つの場合に分けて考える。すなわち矩形波変化(図3.2 a)とする場合と三角波変化(図3.2 b)とする場合である。各々の変化周期をそれぞれ  $T_s$ ,  $T_t$  とする。



(a) 矩形波変化



(b) 三角波変化

図3.2 位相の  $t$ -変化 (ii) の場合)

計算の結果は、

(a) 振幅変化が図3.1のようにランダムな変化に従い、位



相変化が図3.2 (a) の矩形変化の場合の重畳する成分の周波数の差異による変化は図S.1を参照.

(b) 振幅変化が図3.1のようにランダムな変化に従い, 位相変化が図3.2 (b) の三角波変化の場合の重畳する成分の周波数の差異による変化は図S.2を参照.

(ii) の場合は変化周期を  $\tau_{rr}$  とすれば点  $m\tau_{rr}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) での振幅変化値  $p_2(m\tau_{rr})$  は  $[-1/2, 1/2]$  の一様乱数, 位相変化値  $q_2(m\tau_{rr})$  を  $[-\pi, \pi]$  の一様乱数とする. そして  $m\tau_{rr} < t < (m+1)\tau_{rr}$  での  $p_2(t)$  および  $m\tau_{rr} + \Delta t < t < (m+1)\tau_{rr} + \Delta t$  での  $q_2(t)$  (初期位相  $q_2(0) = 0$  で  $\Delta t$  より位相があるとする) の各値は線形補間で求める. 以後の計算では重畳成分の周期を  $T_2$  として,  $\tau_{rr} = 2T_2$  ととった.  $p_2(t)$  の変化は図3.3,  $q_2(t)$  の変化は図3.4に示す. なお図3.3, 図3.4において○印は乱数値を示す.

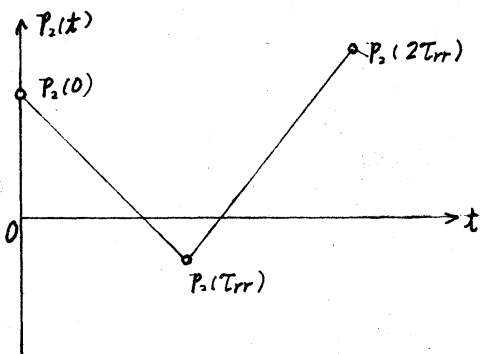


図3.3 振幅の  $t$ -変化 (ii) の場合)

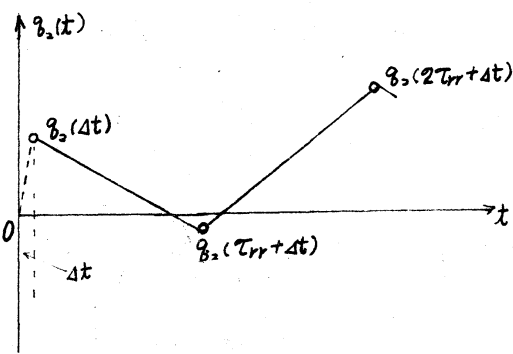


図3.4 位相の  $t$ -変化 (ii) の場合)

偶然度  $\epsilon_2$ ,  $\delta_2$  の変化による計算の結果は図S.3を参照.

### 3.3 乱流に近い領域

乱流に近い領域においては偶然化が進んでおり波数成分も多くなっていると考えられる。したがって偶然度  $\epsilon_k$ ,  $\delta_k$  は大きく, 規則性を示す量  $f_k$ ,  $g_k$  はほぼ零に近いと考えられる。それで  $f_k = g_k = 0$  とおく。つぎに初期位相  $\alpha_k = 0$ , 位相変化  $\eta_k = 1$  とおく。さらにスペクトル構成関数  $m_k = 1/k$  にし, 重ね合せの基本波の個数  $N = 10$  とする。

したがって速度変動の基本式は,

$$u = \sum_{k=1}^N m_k (1 + \epsilon_k P_k(t)) \sin(\omega_k t + \delta_k g_k(t)) \quad (3.4)$$

となる。各波数成分の変化周期  $\tau_{rrk}$  が定まれば,  $P_k(t)$  は図 3.3,  $g_k(t)$  は図 3.4 に従う  $t$ -変化を行う。以下の計算においては,  $\tau_{rrk} = 2 T_k$  ( $T_k$  は  $k$  成分の周期) とし, 偶然度  $\epsilon_k$ ,  $\delta_k$  の変化による乱流波形の変形を求めた。その結果は図 5.4 を参照。それにとりあうエネルギースペクトルの変化は図 5.5 を参照。

## § 4. 数値実験の結果と検討.

### 4.1 初期遷移過程にみられる規則性.

図 5.1 の変化は振幅の  $t$ -変化がランダム, 位相の  $t$ -変化が規則的矩形波の場合である。重畳する成分波の周波数  $\omega_k$  と変化周期は逆比例し, また位相変化の頻度は変化周期に逆比例

するようになったから $\omega_2$ が増加するに従い位相変化の頻度は激しくなる。これより図S.1において(a)~(d)で次第に基本波に対する切込みが深くなり、多くなってゆく過程が理解出来る。しかし基本波の周期性は残っている。

図S.2の変化は振幅の $\omega$ -変化がランダム、位相の $\omega$ -変化が規則的三角波の場合である。図S.1と同様にこの場合も重畳成分波の周波数 $\omega_2$ の増加と位相変化の頻度を比例させた。図S.2の(a)~(d)の過程は図S.1と比較してゆるやかな変化であるけれども切込みや波形の変形が次第に増加している。しかし図S.1と同様に基本波の周期成分が残存している。

図S.3は位相および振幅の $\omega$ -変化がともにランダムな場合である。(a)および(b)は基本波にその2倍の周波数をもつランダムな成分波を重ねた場合で、偶然度の増加と共に波形の崩れが生じる。しかし波形の崩れもさほど不規則でなく、(b)の場合にも規則性が保たれている。(c)、(d)の場合は重畳する成分波の周波数が増加した場合である。(c)の場合には台形の上辺部にくぼみがある規則的な波形列がみられる。(d)図の場合には基本波の小さな崩れ-基本波のさび波-がみられる。

実験結果、たとえば佐藤、恩田<sup>11)</sup>を参照してみると、初期遷移においては正弦波的ではないけれども類似の形をした波

形列がみられ規則性がきわめて良くなったもたれている。これらの原因を我々は規則的な位相変化が重要な要素であると考えていた。しかし図5.1～図5.3の結果は規則的な位相変化より、ランダムであるけれども変化がゆるやかで偶然度が小さい場合に類似した規則的な波形列があらわれる事を示している。この事は遷移の初期においても偶然化の芽生えがあると思なしても良いと考えられる。これは図5.1, 図5.2の例は規則的であるけれども変化が不連続な位相を考えたため物理的にみて不自然と云う理由によるのかも知れない。

#### 4.2 乱流への接近

図5.4は偶然化の過程が進行して、偶然度の大きい乱流に近い状態を示している。(a), (d)の段階では基本波の周期性が目立つ, (c), (d)あたりから周期成分はほぼ姿をけし, 切込みが深くなり, 零点を切る回数が多くなる。(e)～(f)にいたってほぼ乱流の“特徴的な周波数成分が存在しない”という性質を示している。図5.4の(a)～(f)に対応するエネルギースペクトルの変化は図5.5にみられる。図において $E(k)$ はエネルギースペクトルを示す。(a)～(c)においては低周波成分の寄与が大まく, 高周波成分の寄与は少い。しかし(c)～(d)にいたって次第に高周波成分の影響が増大し, (e), (f)においては $k^2$

の直線にきわめて良く一致する。 $k^{-2}$ の直線はスペクトル構成関数  $M_k$  を  $k^{-1}$  に選んだ事によると思われる。完全乱流状態になってエネルギースペクトルが究極的に  $k^{-5/3}$  則をみたすかどうかの検証は行なえなかった。

完全な乱流が実現するためには多くの波数成分が存在すること、および位相、振幅の偶然度が大きくなりなせねばならない事が要求される。さらにエネルギースペクトルの高周波成分の寄与が大きい形をしている事が必要となる。

## § 6. 結 語

1. 初期遷移においても偶然化のきざしがあるが、規則的な波形列がみられる。

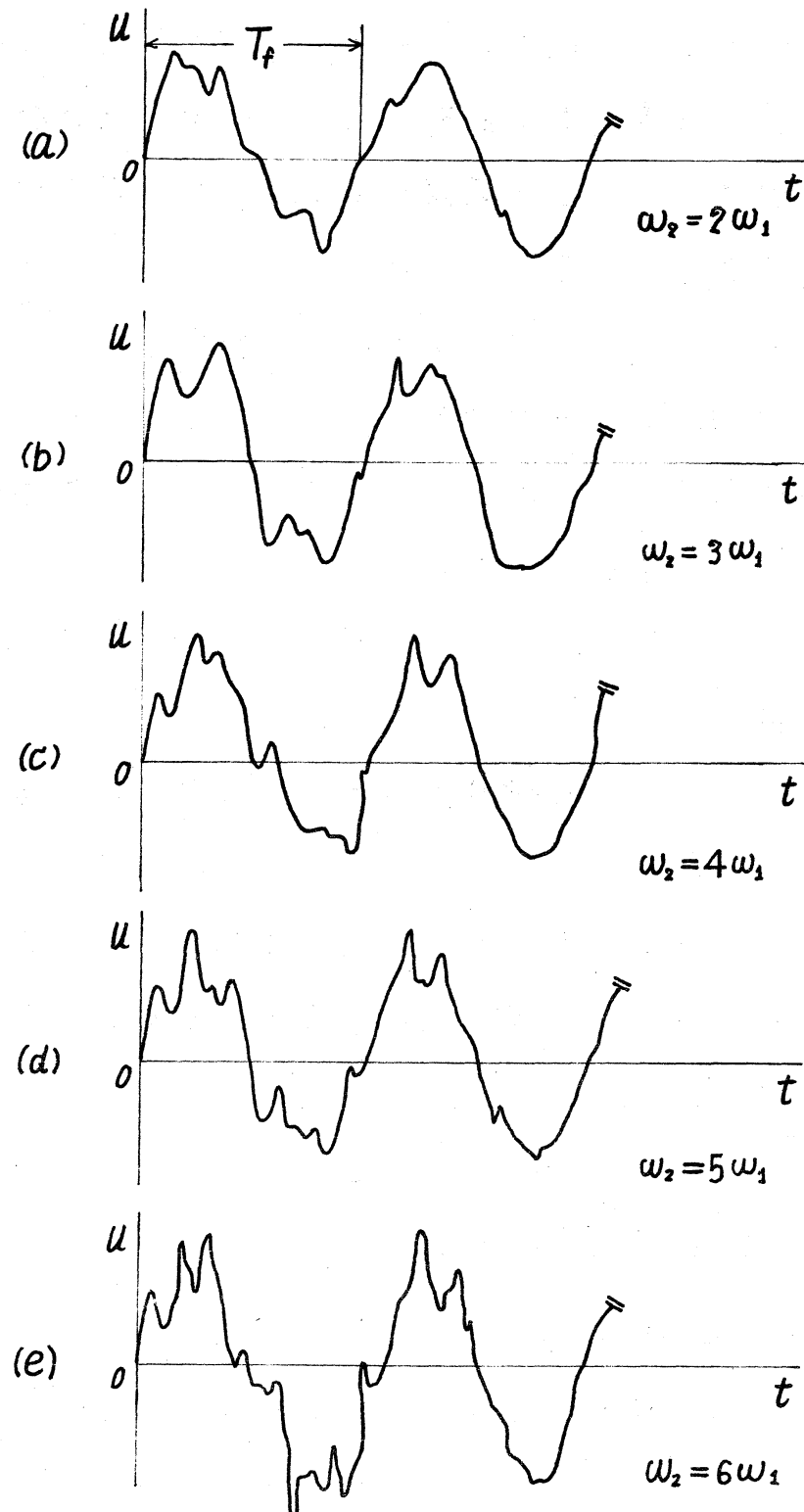
2. 乱流が実現するためには大きな振幅および位相の偶然度が要求され、数多くの波数成分の存在が必要である。

## 参 考 文 献

(1) H. Sato and Y. Onda ISAS Report No. 453 (1970)

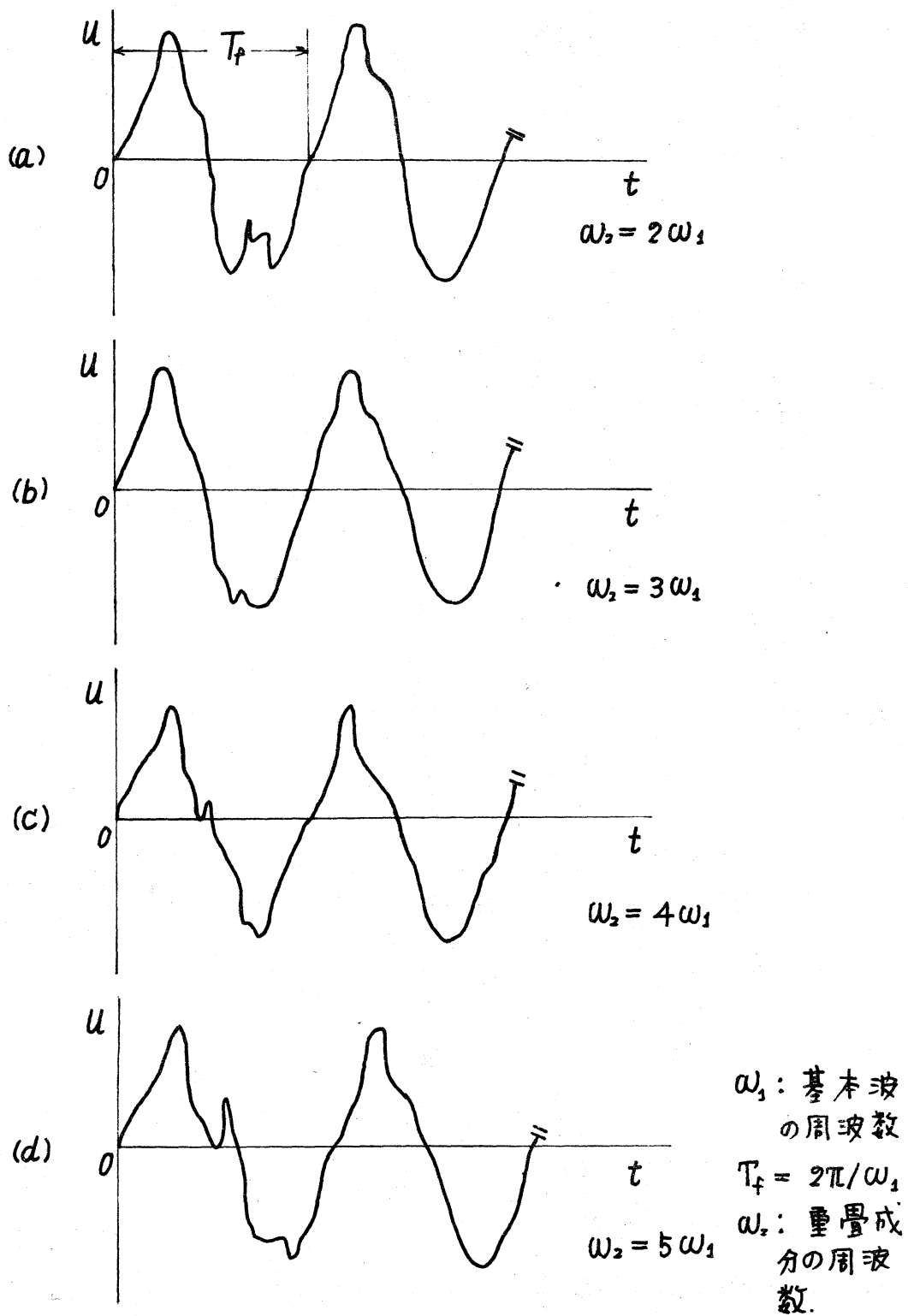
"Detailed Measurements in the Transition Region

of a Two-dimensional Wake".

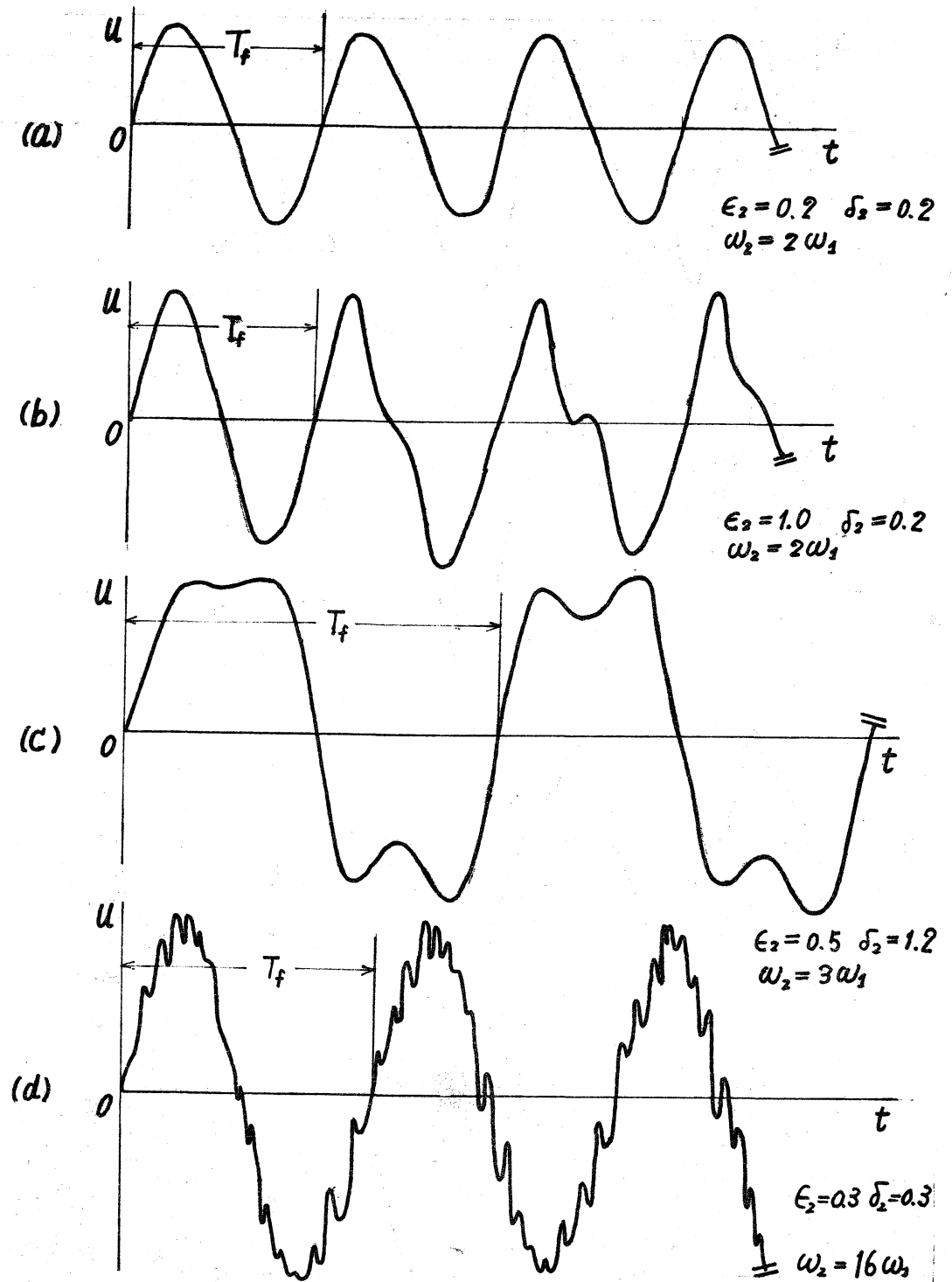


$\omega_1$ : 基本波の周波数  
 $T_f = 2\pi/\omega_1$   
 $\omega_2$ : 重畳成分の周波数

図S-1. 位相変動が矩形波の場合.



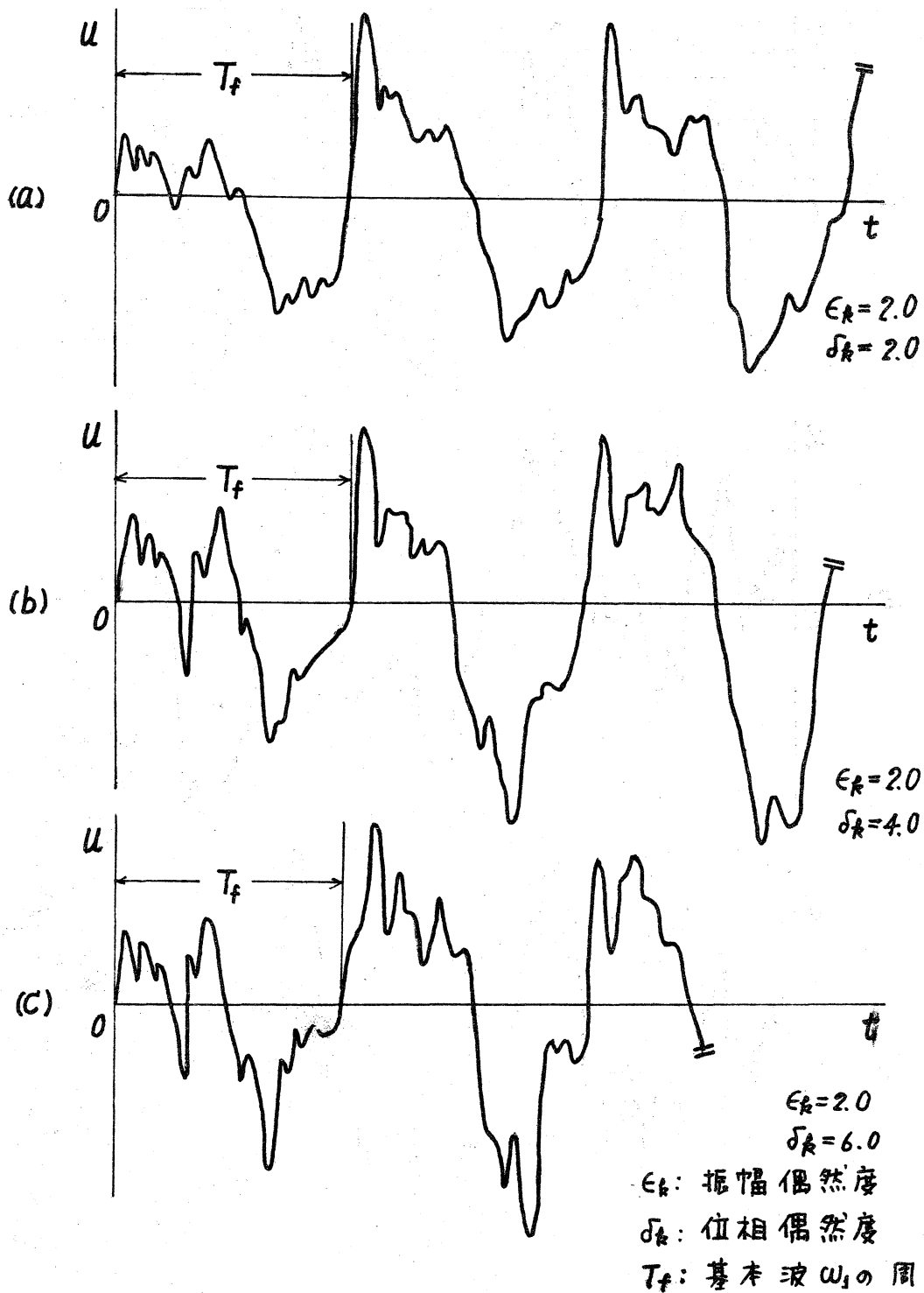
図S.2. 位相変動三角波状の場合



図S-3. 位相および振幅変動がランダムな  
場合の正弦波の偶然化過程.

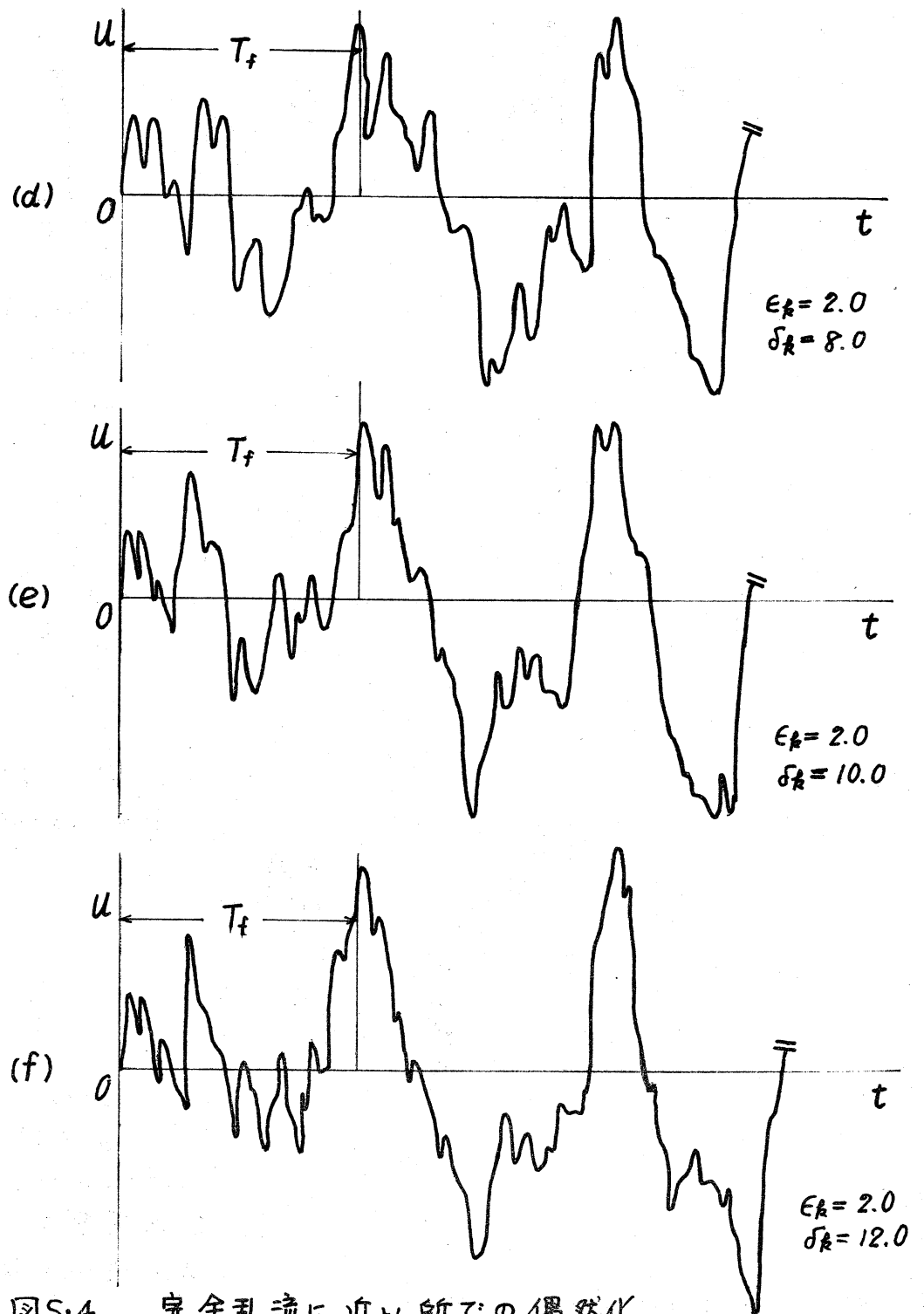
$\omega_1$ : 基本波の周波数  
 $T_f = 2\pi/\omega_1$



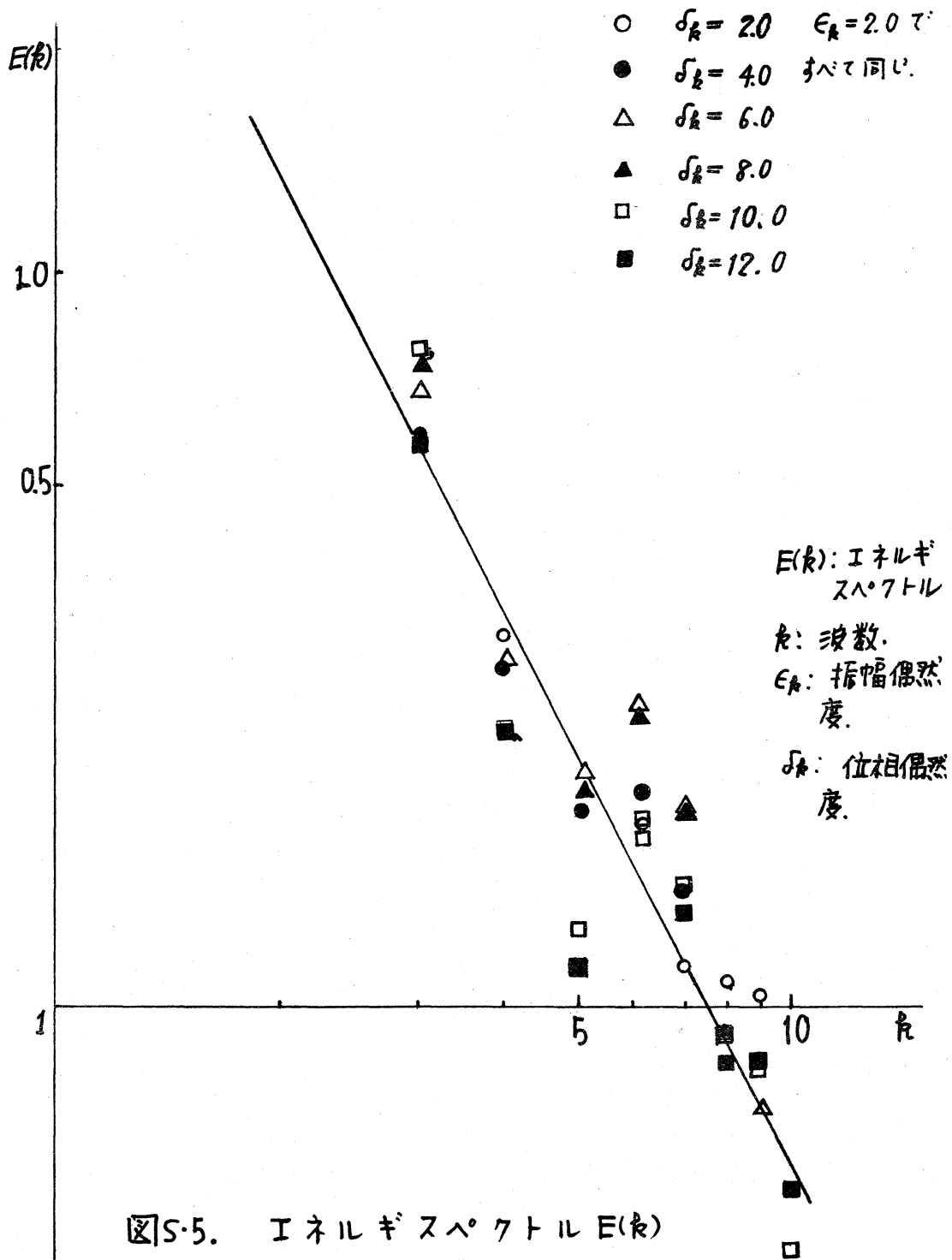


図S-4. 完全乱流に近い所での偶然

化過程(その1)



図S-4. 完全乱流に近い所での偶然化過程(その2)



図S-5. エネルギースペクトル  $E(k)$   
 の偶然度による変化